

## 全国 2015 年 4 月高等教育自学考试

## 线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

## 选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

说明:在本卷中,  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置矩阵,  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵,  $E$  是单位矩阵,  $|A|$  表示方阵  $A$  的行列式,  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩。

## 一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的,请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 设  $a, b$  为实数, 且 
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
, 则

- A.  $a=0, b=1$       B.  $a=1, b=0$       C.  $a=0, b=0$       D.  $a=1, b=1$

2. 若  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & y \end{pmatrix}$ , 且  $2A = B$ , 则

- A.  $x=1, y=2$       B.  $x=2, y=1$       C.  $x=1, y=1$       D.  $x=2, y=2$

3. 已知  $A$  是 2 阶可逆矩阵, 则下列矩阵中与  $A$  等价的是

- A.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设 3 阶实对称矩阵  $A$  的全部特征值为  $-1, 1, 1$ , 则齐次线性方程组  $(E - A)x = 0$  的基础解系所含解向量的个数为
- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3
5. 矩阵  $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  有一个特征值为
- A.  $-3$                       B.  $-2$                       C. 1                      D. 2

## 非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

www.zikao365.com

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

6. 设  $A$  为 3 阶矩阵, 且  $|A| = 3$ , 则  $|3A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
7. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , 则  $A^* = \underline{\hspace{2cm}}$ .
8. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A^T B^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
9. 设向量  $\alpha_1 = (1, -2, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 0, -1)^T$ , 则内积  $(\alpha_1, \alpha_2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
10. 若向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (k-1, 4, 2)^T$  线性相关, 则数  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .
11. 与向量  $(1, 0, 1)^T$  和  $(1, 1, 0)^T$  均正交的一个单位向量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
12. 向量空间  $V = \{x = (x_1, x_2, 0)^T \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$  的维数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
13. 若齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
14. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  的两个特征值之和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
15. 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  的矩阵为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$  的值.

17. 设 2 阶矩阵  $A$  的行列式  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求行列式  $|(2A)^{-1} + 2A^*|$  的值.

18. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $X = AX + B$ , 求  $X$ .

19. 求向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 5, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, 3, -6)^T$ ,  $\alpha_4 = (3, -1, 10)^T$  的秩和一个极大线性无关组, 并将向量组中的其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 问数  $a$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$
 有无穷多解? 并求出其通解.

(要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示)

21. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的全部特征值和特征向量.

22. 用配方法化二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$  为标准形, 并写出所作的可逆线性变换.

四、证明题（本题 7 分）

23. 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵, 且  $A = B + E$ ,  $B^2 = B$ , 证明  $A$  可逆.