绝密 ★ 考试结束前

全国2014年10月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩。

选择题部分

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将“答题纸”的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1．设2阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21}+2a_{11} & a_{22}+2a_{12} \end{vmatrix}=$

A．$-2m$　　B．$-m$

C．m　　D．$2m$

2．设A为3阶矩阵，将A的第3行乘以$\frac{1}{2}$得到单位矩阵E，则$|A|=$

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$

C．$\frac{1}{2}$　　D．2

3．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中

A．必有一个零向量

B．任意两个向量都线性无关

C．存在一个向量可由其余向量线性表出

D．每个向量均可由其余向量线性表出

4．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$，则下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为

A．$\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

5．若 4 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为

A．1　　B．2

C．3　　D．4

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

6．设 $f(x)=\begin{vmatrix}2-x & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根是__________.

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=$__________.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{2}$，则行列式 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}\right|=$__________.

9．设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=$__________.

10．设 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-1,4)^{\mathrm{T}}$，若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 满足 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\gamma}=$__________.

11．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则数 $k=$________.

12．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}$，则 3 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为____________.

13．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为____________.

14．设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 -1 和 1，则 $\boldsymbol{A}^2=$____________.

15．设二次型 $f(x_1,x_2)=tx_1^2+x_2^2+2tx_1x_2$ 正定，则实数 t 的取值范围是____________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分）

16．计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$ 的值.

17．设 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & x & 3\\ x & 2 & 0\\ 6 & -1 & 4\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 D 中（i，j）元素（i，j=1，2，3）的代数余子式，已知 $A_{12}=4$，求 A_{21} 的值.

18．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19．设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(k+1,1,k,k+1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(k^2+1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试确定当 k 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出表示式.

20．求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ \quad\ \ x_2+2x_3+2x_4=1\\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1\end{cases}$ 的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似，求数 x 与可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$．

22．用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$ 化为标准形，写出标准形和所作的正交变换．

四、证明题（本题 7 分）

23．设 $A, B, A-B$ 均为 n 阶正交矩阵，证明 $(A-B)^{-1}=A^{-1}-B^{-1}$．