

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中

- A. 必有一个零向量
- B. 任意两个向量都线性无关
- C. 存在一个向量可由其余向量线性表出
- D. 每个向量均可由其余向量线性表出

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, 则下列向量中是 A 的属于特征值 -2 的特征向量为

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2$ 的正惯性指数为

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

6. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根是_____.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^* = _____.

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = -\frac{1}{2}$, 则行列式 $|(2A)^{-1}| =$ _____.

9. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若矩阵 A 满足 $PA = B$, 则 $A =$ _____.

10. 设向量 $\alpha_1 = (-1, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 2)^T$, $\alpha_3 = (4, 2)^T$, 则 α_3 由 α_1, α_2 线性表出的表示式为 _____.

11. 设向量组 $\alpha_1 = (3, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (4, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, k)^T$ 线性相关, 则数 $k =$ _____.

12. 3 元齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系中所含解向量的个数为 _____.

13. 设 3 阶矩阵 A 满足 $|3E + 2A| = 0$, 则 A 必有一个特征值为 _____.

14. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 -1 和 1 , 则 $A^2 =$ _____.

15. 设二次型 $f(x_1, x_2) = tx_1^2 + x_2^2 + 2tx_1x_2$ 正定, 则实数 t 的取值范围是 _____.

三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分)

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

17. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

18. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 且矩阵 X 满足 $AX + E = A^3 + X$, 求 X .

19. 设向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (k+1, 1, k, k+1)^T$, $\beta = (k^2+1, 1, 1, 1)^T$, 试确定当 k 取何值时 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并写出表示式.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 求数 x 与可逆矩阵 P , 使

得 $P^{-1}AP = B$.

22. 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ 化为标准形, 写出标准形和所作的正交变换.

四、证明题 (本题 7 分)

23. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量都线性无关. 证明: 存在全不为零的常数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$.